Session de 1975

CONCOURS SPECIAL DE RECRUTEMENT
AUX GRANDES ECOLES SCIENTIFIQUES

MATHEMATIQUES I

N.B : Les deux problèmes sont indépendants et obligatoires ; ils peuvent être traité dans un ordre indifférent.

PROBLEME I -

On donne la suite de nombres réels : $r_0, r_1, r_2 \ldots\ldots, r_n, r_{n+1} \ldots$

dans laquelle $r_{n+1} = \frac{a+n}{b+n} r_n$ avec les conditions :

$r_0 \neq 0$; $(a, b) \in \mathbb{R}^2$; $a \neq b$; $-b \in \mathbb{N}$; $n \in \mathbb{N}$

1° - Cette suite a-t-elle une limite ?

2° - On considère la série entière, de la variable réelle x, de terme général $u_n = r_n x^n$ et de premier terme $u_0 = r_0$. Déterminer son intervalle de convergence. Peut-on trouver la nature de la série aux bornes de cet intervalle ?

3° - Soit y(x) la somme de la série de terme général $u_n = r_n x^n$.
Montrer que y(x) satisfait à une équation différentielle du type

(1) $\qquad (x - x^2)y' + P(x)y = \Upsilon \qquad$ (avec $y' = \frac{dy}{dx}$)

dans laquelle P(x) est un polynôme entier et Υ une constante.
Montrer d'abord que P(x) est un polynôme du premier degré $\alpha x + \beta$
Déterminer ensuite les nombres α , β , Υ en fonction de a et de b.

4° - On part maintenant de l'équation différentielle (1) établie au § 3°, soit :

(E) $\qquad (x - x^2)y' + (\alpha x + \beta)y = \Upsilon$

Déterminer son intégrale générale (le calcul complet se ramenant à des fonctions connues n'est en général pas possible). Parmi les fonctions ainsi trouvées, peut-on reconnaître celle qui est développable en série entière ?

5° - A l'aide des résultats des §3° et 4°, trouver la somme de la série entière du §2° quand $a = -\frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{2}$ (On distinguera les deux cas : $x > 0$ et $x < 0$).

6° - Indiquer un ensemble de valeurs de a et de b pour lesquelles le calcul complet de la solution de l'équation différentielle (E) développable en série entière se ramène à des fonctions connues.

PROBLEME II -

Soient trois nombres a, b, c, réels ou complexes et a différent de zéro.

On considère l'ensemble E des matrices M de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et on y associe le polynôme du second degré $P(M, x) \equiv ax^2 + 2bx + c$

1° - Que peut-on dire des racines de l'équation $P(M, x) = 0$ si la matrice M est régulière ; quelle transformation permet alors de passer de $P(M, x)$ à $P(M^{-1}, x)$, M^{-1} désignant la matrice inverse de M ?

2° - On recherche dans E les matrices M telles que le produit de deux matrices appartienne à E. Montrer que ces matrices appartiennent à trois sous-ensembles dont les deux premiers correspondent aux cas : (α) $a = c$; (β) $b = 0$

Quelles sont dans chacun de ces deux cas les propriétés des racines de $P(M, x) = 0$?

3° - On appelle E_K le sous-ensemble de E formé des matrices M_K de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a - 2Kb \end{pmatrix}$ dans lesquelles K est un nombre constant non nul. En supposant a et b réels rationnels et K réel irrationnel, étudier la structure du sous-ensemble E'_K de E_K ainsi défini.

Est-ce un espace vectoriel, un anneau, un corps ?

Si E'_K est un espace vectoriel, en indiquer une base et donner sa dimension.

4° - On suppose, dans cette dernière partie, que a, b, c sont trois nombres réels et on pose $K = \operatorname{sh}\theta$ (avec $\theta \neq 0$).

a) - Quelles sont les valeurs propres de la matrice M_K ? Quels en sont les vecteurs propres ? n étant un entier postifi, discuter la réalité des racines de l'équation $P\left[(M_K)^n, x\right] = 0$

b) - Diagonaliser la matrice $(M_K)^n$ dans le cas particulier :

$a = b = 1$ $\quad n = 2p$ $\quad p \in \mathbb{N}^*$

Les racines de l'équation $P\left[(M_K)^n, x\right] = 0$ admettent-elles des limites quand p augmente indéfiniment, et si oui, quelles sont ces limites ?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail